



TITLE:

旧くて新しい問題/Euler標数(組合せ論とその周辺の研究:可換環論・代数幾何・Lie環の表現論と半順序集合の相互関係)

AUTHOR(S):

郡山, 彬

CITATION:

郡山, 彬. 旧くて新しい問題/Euler標数(組合せ論とその周辺の研究:可換環論・代数幾何・Lie環の表現論と半順序集合の相互関係). 数理解析研究所講究録 1988, 641: 21-33

ISSUE DATE:

1988-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100201>

RIGHT:

旧くて新しい問題/ Euler 標数

東海大学理学部情報数理学科

郡山 彬 (Akira Koriyama)

§0. 序

単体的複体 K において、 K の各次元の単体の個数は、 K の位相的性質をどの程度規定するであろうか。Euler (1752) は 2 次元凸多面体について、いわゆる Euler の公式 " $V - E + F = 2$ " を証明した。この公式は容易に n 次元にまで拡張することができる (例えば [Brø], あるいは [H] 参照)

「 P を $(n+1)$ -次元凸胞体 (convex polytope), $f_i(P)$ を P の i -次元面 (face) の個数とすると、 $\sum_{j=0}^n (-1)^j f_j(P) = 1 + (-1)^n$ 」

上式は、 n 次元 (有限) 単体的複体 (より一般に n 次元 (有限) 胞複体) にまで拡張され、いわゆる Euler-Poincaré の公式が成立する。

「 Δ を n 次元単体的複体, β_i を Δ の i -次元 Betti 数, i.e.

$\beta_i = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{F}) \in \mathbb{N}$ (\mathbb{F} は体) とする。

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j f_j(\Delta) = 1 + \sum_{j=0}^n (-1)^j \beta_j \quad (\equiv \tilde{\chi}(\Delta) + 1) \quad \square$$

$\tilde{\chi}(\Delta)$ を Δ の複約 Euler 標数という。Euler の公式が出発点とも言える、凸胞体や単体的複体の面や単体の個数に関する研究は組合せ数学の人々に受け継がれ、組合せ数学の重要な問題の一つとなってきた。このノートでは、ここ数年、A. Björner と、その周辺の人々によって証明されたいくつかの結果を紹介する。

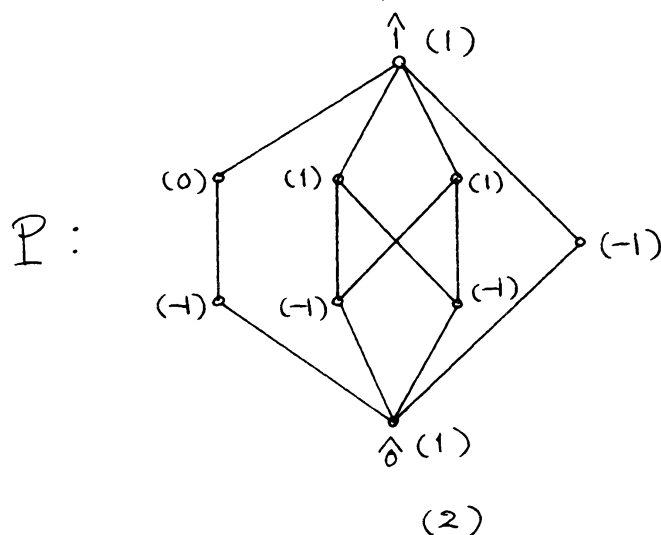
§1. Möbius 関数と Euler 標数

P を最小元 $\hat{0}$ 、最大元 $\hat{1}$ を持った (有限) 半順序集合 (以下、poset と略す) とする。関数 $\mu: P \times P \rightarrow \mathbb{Z}$ を次式で定義し P の Möbius 関数という。

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 0 & (x \not\leq y) \\ 1 & (x = y) \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) & (x < y) \end{cases}$$

例 1.

下図の poset P の場合、 $\mu(\hat{0}, x)$ ($\hat{0} \leq x \leq \hat{1}$) の値はカッコ内のようなになる。特に $\mu(\hat{0}, \hat{1}) = 1$ である。



P 上の Möbius 関数の値 $\mu(x, y)$ は P の鎖の個数によっても次のように表現できる。

定理 1. (P. Hall) (G.C. Rota [R], p. 346, Prop. 6 参照)

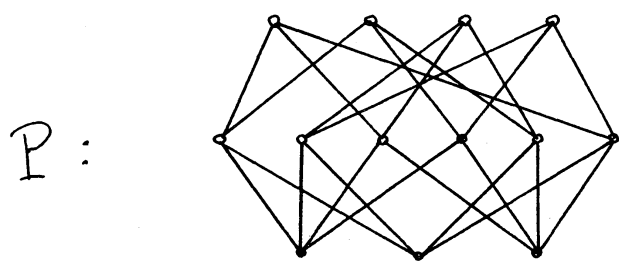
x, y が P において $x \neq y$ であるならば、

$$\mu(x, y) = \# \{ \text{開区間 } (x, y) \text{ 内の奇数鎖} \} - \# \{ \text{開区間 } (x, y) \text{ 内の偶数鎖} \},$$

ここで、 n -鎖とは、 n 個の頂点を持つ鎖のことである。特に、空集合は 0 -鎖と考える。

P を poset とし、 $\mathcal{C}(P)$ を P の鎖全体とする。 $(n+1)$ -鎖 $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ を n -単体と考えたと $\mathcal{C}(P)$ は抽象的単体的複体となる。 $\mathcal{C}(P)$ の幾何学的実現を $\Delta(P)$ と書き、 P の順序複体 (order complex) という。

例 2. 下図の poset P の $\Delta(P)$ は、2次元実射影空間 P^2 の一つの単体分割であることが容易に確かめられる。



さて、定理 1 の系として、次のことが容易にわかる。

定理 1 の系

$$\mu(x, y) = \tilde{\chi}(\Delta(x, y)) \quad (x \neq y \in P)$$

有限な poset P が与えられたとき、 P に最小元 $\hat{0}$ 、最大元 $\hat{1}$ を強制的に付加した poset を $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ とし、

$\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$ in \hat{P} と定義すると、上の系より明らかに、 $\mu(P) = \tilde{\chi}(\Delta(P))$ (これを P の Möbius 数と呼ぶ) である。定理 1 より、 $\mu(P)$ の計算は原理的には $(\hat{0}, \hat{1})$ 内の奇数鎖の個数と、偶数鎖の個数を求めればよいわけだが、単純な P 以外は極めて難しい (この報告集中の成嶋弘氏の報告を参照されたい)。G. C. Rota [R] は、 P が有限束の場合、 $\mu(P)$ を求めるには P の crosscut と呼ばれる特殊な部分集合を調べればよいことを証明した。Rota の結果を少し一般的形式で述べると次のようになる。まず、 P の crosscut C を以下のように定義する。

定義 1 P を任意の poset ($|P| = +\infty$ も許す) とする。 P の部分集合 C が次の (1) ~ (3) をみたすとき、 C を P の crosscut と呼ぶ:

- (1) C は反鎖 i.e. C のどの二元も比較不能である。
- (2) P の任意の鎖は C の元を含むように拡張できる。
- (3) A が C の部分集合でかつ、 P において、上 (または下) に有界ならば、上限 (または下限) を持つ。

定理 2 (A. Björner [B])

P を有限 poset, C をその crosscut とする。 C の、上下限
(4)

をもたない k -集合の個数を a_k とおくと、

$$\mu(P) = \sum_{k \geq 2} (-1)^k a_k$$

が成り立つ。

同じく、Rota の crosscut 定理の延長線上にあり、 $\mu(P)$ を P の部分集合 (特に区間) の Möbius 数で記述した定理として、次の Crapo の定理がある。

定理 3 (H. H. Crapo [C])

L を有限束とし、 $s \in L$ の補元の全体を $\perp(s)$, i.e.

$$\perp(s) = \{x \in L \mid x \wedge s = \hat{0}, x \vee s = \hat{1}\} \quad \text{とする.}$$

$$\text{このとき, } \mu(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{\substack{x, y \in \perp(s) \\ x \leq y}} \mu(\hat{0}, x) \mu(y, \hat{1})$$

が成立する。

Björner-Walker は Crapo の定理をより一般的にし、束のホモトピー型にまで言及している。まず、poset の積(join) を以下のように定義する。

定義 2. P と Q を二つの poset とする。 P と Q の積 $P * Q$ の要素集合は P と Q の disjoint union $P \cup Q$ である。

$P * Q$ の順序 \leq は次のように定める。

$$x \leq y \text{ in } P * Q \iff \begin{cases} \text{(i)} x, y \in P \text{ かつ } x \leq_P y, \text{ または} \\ \text{(ii)} x, y \in Q \text{ かつ } x \leq_Q y, \text{ または} \\ \text{(iii)} x \in P \text{ かつ } y \in Q \end{cases} \quad (5)$$

定義 3. P を任意の poset, A を 2 個の要素 $\{a, b\}$ からなる反鎖, $\Delta(P)$ を P の順序複体とする. 多面体 $|\Delta(P)|$ の懸垂 $\text{Susp}|\Delta(P)|$ を, $\text{Susp}|\Delta(P)| = |\Delta(P * A)|$ で定義する.

定義 4. (X_i, x_i^0) ($i=1, 2, \dots, n$) を, 基点 $x_i^0 \in X_i$ をもった位相空間とする. (X_i, x_i^0) ($i=1, 2, \dots, n$) の one-point union $\bigvee (X_i, x_i^0) = \bigvee X_i$ を次式で定める.

$$\bigvee_{i=1}^n X_i = \left(\bigcup_{i=1}^n X_i \right) / \left(\bigcup_{i=1}^n \{x_i^0\} \right)$$

以上の定義を使って, B-W の定理は次のように述べられる.

定理 4 (A. Björner - W. Walker [B-W])

L を $\{\hat{0}, \hat{1}\}$ を持った束, $\overline{L} = L - \{\hat{0}, \hat{1}\}$, $s \in \overline{L}$ とする. このとき, $\perp(s)$ が反鎖ならば,

$$|\Delta(\overline{L})| \simeq \bigvee_{x \in \perp(s)} \text{Susp} |\Delta[(\hat{0}, x) * (x, \hat{1})]| : \text{同じホモトピー型.}$$

ここで, Euler 標数がホモトピー型不変量であることに注意すると次の系が得られる.

定理 4 の系 定理の条件の下で,

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{x \in \perp(s)} \mu(\hat{0}, x) \mu(x, \hat{1})$$

§2. 単体の位数, Betti 数, そして Björner-Kalai の定理

単体的複体の各次元の単体(面)の位数の間の関係も広い意味で Euler 標数の問題と考えると、まず注目すべき定理として、Kruskal-Katona の定理 ([KR], [KA]) があげられる。まず準備として、いくつかの定義と、よく知られた結果を列記する。尚、Kruskal-Katona の定理と、その周辺の話題に関しては、[P.F-J.A] を参照されたい。

定義 5. N を自然数全体とし、 N の k -集合全体を $\binom{N}{k}$ と書く。さらに、 $A, B \in \binom{N}{k}$ に対して、

$$A <_{RL} B \iff \max(A \Delta B) \in B$$

によって、逆辞書式順序 $<_{RL}$ を定義し、線型順序集合 $(\binom{N}{k}, <_{RL})$ を S_k と略記する。

定義 6 と定理 m と l を任意に与えられた正整数とする。次の表現を m の l -項展開表現と呼ぶ。

$$m = \binom{a_l}{l} + \binom{a_{l-1}}{l-1} + \cdots + \binom{a_t}{t}$$

$$a_l > a_{l-1} > \cdots > a_t \geq t \geq 1$$

この表現は常に存在し、かつ一意である。

定義 7. $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 $[n]$ の k -集合の全体を $\binom{[n]}{k}$ と書く。 $\binom{[n]}{k}$ の部分集合 \mathcal{F} に対して、 \mathcal{F} の影 $Sh(\mathcal{F})$ を、

$$Sh(\mathcal{F}) = \{F \in \binom{[n]}{k-1} \mid \exists \tilde{F} \in \mathcal{F} \text{ s.t. } F < \tilde{F}\} \quad (7)$$

で定義する.

定義 8. $\mathcal{A} \subset S_R$ が圧縮的であるとは、 \mathcal{A} が、 S_R の元を途中めけることなく、先頭から丁度 $|\mathcal{A}|$ 個取り出して作った集合になっていることである。一般に、任意に $\mathcal{A} \subset \binom{[N]}{R}$ が与えられたとき、 S_R の元を、途中めけることなく、先頭から丁度 $|\mathcal{A}|$ 個取り出して作った集合を $C(\mathcal{A})$ と書き、 \mathcal{A} の圧縮と呼ぶ。明らかに、

$$\mathcal{A} \text{ が圧縮的} \iff C(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$$

である。

定義 9. Δ を $\{1, 2, \dots, N\}$ を頂点集合とする単体的複体とする。 Δ の i -単体 (i -面) の個数を f_i とし、ベクトル (f_0, f_1, \dots, f_d) ($d = \dim \Delta$) を、 Δ の f -ベクトルと呼び、 $f(\Delta)$ と書く。今後 $f(\Delta)$ は、 $d+1$ 次元以上の成分は 0 とおいて、 $N_0^{(\infty)} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_i \in \mathbb{N}, \text{ 高々有限個の } a_i \text{ が } \neq 0\}$ のベクトルと考えることにする。

さて、我々が必要としてゐる Kruskal-Katona の定理は次の様に述べることができる。

定理 5 (Kruskal-Katona) $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{R}$ とする。

$|\mathcal{A}| = m = \binom{a_R}{R} + \binom{a_{R-1}}{R-1} + \dots + \binom{a_i}{i}$; $a_R > a_{R-1} > \dots > a_i \geq i \geq 1$ ならば、

$$|Sh(\mathcal{A})| \geq \partial_R(m) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{a_R}{R-1} + \binom{a_{R-1}}{R-2} + \dots + \binom{a_i}{i-1} \quad (8)$$

今、 \mathcal{F} を、単体的複体 Δ の k 次元単体の全体であるとする
と、 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k+1}$ である。このとき、 $SK(\mathcal{F})$ は \mathcal{F} から生じる
($k-1$)-次元単体の全体である。ところで、 Δ の ($k-1$)-次元単
体の個数 f_{k-1} は $|SK(\mathcal{F})|$ 以上だから、定理 5 より、

$f_{k-1} \geq \partial_k(f_k)$ でなければならぬことがわかる。この様
な考察をもとにして、次の定理を得る。

定理 6 (Kruskal-Katona)

任意に与えられたベクトル $f = (f_0, f_1, \dots) \in N_0^{(\infty)}$ に対して、次
の各条件は互に同値である。

- (i) f は単体的複体の f -ベクトルである。
- (ii) $\partial_k(f_k) \leq f_{k-1} \quad (\forall k)$
- (iii) f は圧縮的複体の f -ベクトルである。

ここで、単体的複体 Δ が圧縮的複体であるとは、各 $k \geq 0$
について、「 k -単体の全体 Δ_k を S_{k+1} の部分集合と考えた
とき、 Δ_k は圧縮的」という条件が成立することである。

以上が Kruskal-Katona の定理であるが、 Δ に対する条
件に、Betti 数も加えたならば、これらの定理はどのような
なるであろうか。この問題に対する一つの答が、これから述
べる Björner-Kalai の定理である。

例によって、まず定義から始めよう。

定義 10. 単体的複体 Δ の i 次元 Betti 数 β_i とは、
(9)

$\beta_i = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{F})$ のことである。以下体 \mathbb{F} は 1 つ固定して考える。 $\beta(\Delta) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_d)$ とおき、さらに定義 9 と同様の処理をして $\beta(\Delta) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$ と考え、これを、 Δ の Betti 数列と呼ぶ。

定義 11. $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$ に対して、

$$S^\alpha = S^0 \underbrace{\vee \dots \vee S^0}_{\alpha_0 \text{ 個}} \vee S^1 \underbrace{\vee \dots \vee S^1}_{\alpha_1 \text{ 個}} \vee S^2 \underbrace{\vee \dots \vee S^2}_{\alpha_2 \text{ 個}} \vee \dots$$

(各 S^i は i -次元球面) と定義する。定義より明らかに、

各 k に対して、 $\beta_k(S^\alpha) = \alpha_k$ が成り立つ。

定理 7 (Björner - Kalai [B-K])

$f = (f_0, f_1, \dots)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$ を任意に与えられたベクトルとする。次の (1) ~ (3) は互に同値である。

- (1) \exists 単体的複体 Δ s.t. $f(\Delta) = f$, かつ $\beta(\Delta) = \beta$
- (2) \exists 単体的複体 Δ s.t. $f(\Delta) = f$, かつ,

$|\Delta| \simeq S^\beta$: 同じホモトピー型。

- (3) $\chi_{k-1} = \sum_{j \geq k} (-1)^{j-k} (f_j - \beta_j)$ とおくと、

$$\begin{cases} \text{(i)} & \chi_{-1} = 1 \quad \text{かつ,} \\ \text{(ii)} & \partial_k(\chi_k + \beta_k) \leq \chi_{k-1} \quad (\forall k \geq 1) \end{cases}$$

この定理の証明で、(2) \Rightarrow (1) は自明である。

(3) \Rightarrow (2) は、各 k に対して、 S_{k+1} の性質を上手に使って (10)

Δ の長単体の集合を S_{R+1} の中に作ってやればよい。最後にトポロジーのよく知られた手法を使って $|\Delta| \simeq S^R$ を示す。

(1) \Rightarrow (3) が最も難しい。興味ある読者は原論文を参照されたい。

最後に、

この小論は Prof. A. Björner の MIT での講義を参考にしたものである。MIT での大学院講義の聴講を快諾してくださった Prof. A. Björner および、小生に、MIT での研究の機会を与えて下さった MIT の Prof. G. G. Rota, および、東海大学の Prof. H. Narushima に深く感謝いたします。

参考文献

- [B] A. Björner ; Homotopy type of posets and lattice complementation, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 30 (1981), 90-100
- [B-K] A. Björner - G. Kalai ; An extended Euler-Poincaré theorem, (1986), to appear.
- [B-W] A. Björner - W. Walker ; A homotopy complementation formula for Partially Ordered Sets, Europ. J. Comb., 4 (1983), 11-19.

- [Brø] A. Brøndsted ; An Introduction to Convex Polytopes , Graduate Text in Math., 90 (1980), Springer.
- [C] H. H. Crapo ; The Möbius function of a lattice , J. Combinatorial Theory 1 (1966), 126 - 131
- [P.F.-J.A] P. Frankel - J. Akiyama ; 現代組合せ論 (1987) 共立出版株式会社
- [H] T. Homma ; 数学ライブラリー 29 , 組合せ位相幾何学, (1972) 森北出版株式会社
- [KA] G. O. H. Katona ; A theorem of finite sets, in "Theory of graphs" (Proc. Tihany Conf., 1966, P. Erdős and G. Katona, eds.), Academic Press, New York, and Akadémia Kiadó, Budapest, (1968), 187 - 207
- [KR] J. B. Kruskal ; The number of simplices in a complex, in "Mathematical Optimization Techniques" (R. Bellman, ed.), Univ. of California Press, Berkeley - Los Angeles (1963) 251 - 278.
- [R] G. C. Rota ; On the foundations of Combinatorial (12)

Theory I. Theory of Möbius functions,
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie,
Band 2 (1964), 340-368